AIR 1980 DEUXIEME EPREVE A OPTION M

Les deux problèmes sont indépendants.

-164-

(4h Coeff 10)

PROBLEME 1

(I) et (II) sont indépendants.

(III) fait intervenir (I) et (II)

I)

u_o et α étant 2 réels strictement positifs, on leur fait correspondre la suite $S(u_o, \alpha)$ ainsi définie:

a) u_o est le terme de rang 0.

b) u_n étant le terme de rang n, on a $u_{n+1} = e^{\alpha u_n}$

1°) Montrer que $\forall (u_o, \alpha) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ la suite $S(u_o, \alpha)$ est monotone.

Préciser dans quels cas elle est croissante, décroissante, constante.

2°) Suivant les valeurs de α, étudier le nombre de solutions de l'équation : $\frac{\text{Log } x}{x} = \alpha$ (α réel positif)

(on pourra construire le graphique $y = \frac{\text{Log } x}{x}$)

Dans le cas où cette équation a 2 solutions, on les désignera par ℓ_1 et ℓ_2. $(\ell_1 \leqslant \ell_2)$

3°) En utilisant le graphique $y = \frac{\text{Log } x}{x}$, étudier la nature des suites $S(u_o, \alpha)$ suivant le doublet $(u_o, \alpha) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$

(croissante ou décroissante - convergente ou non)

On étudiera d'abord $\alpha > \frac{1}{e}$, $\alpha \leqslant \frac{1}{e}$, puis éventuellement u_o comparé à ℓ_1 et ℓ_2.

Dans le cas d'une suite convergente, on précisera si la limite est ℓ_1 ou ℓ_2.

II)

α étant un réel quelconque, soit $P(\alpha)$ l'ensemble des fonctions f vérifiant :

- f définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$
- $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = f(x + \alpha)$

1°) Chercher s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} f \in P(\alpha) \\ f(x) = rx \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

.../...

et s'il existe $\rho \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} g \in P(\alpha) \\ g(x) = x\, e^{\rho x} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2°) Montrer que si une fonction f vérifie

$$\begin{cases} f \in P(\alpha) \\ f(x) > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

on a : $\forall x \in \mathbb{R} \qquad \exists \theta \in]0, 1[$ tel que :

$$\operatorname{Log} \frac{f'(x)}{f(x)} = \alpha \frac{f'(x + \theta\alpha)}{f(x + \theta\alpha)}$$

III)

Soient $0 < u_o \leq 1$, $\alpha > 0$,

la suite $S(u_o, \alpha)$.

1°) Si une fonction f vérifie : $\begin{cases} f \in P(\alpha) \\ f(x) > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

montrer que $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \\ \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad u_n < \frac{f'(x)}{f(x)}$

2°) En déduire que si une fonction g vérifie : $\begin{cases} g \in P(\alpha) \\ \alpha > \frac{1}{e} \end{cases}$

alors g s'annule au moins une fois.

PROBLEME 2

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$.

Une suite finie de fonctions de E : $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ vérifie la propriété P_n [ou, si on veut préciser, la propriété $P_n(x_1, \ldots, x_n)$] s'il existe n réels distincts $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$\begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ j \neq i \end{cases} \qquad f_i(x_j) = 0 \qquad \text{et} \qquad 1 \leq i \leq n \qquad f_i(x_i) = 1$$

c'est-à-dire :

$f_1(x_1) = 1 \quad f_1(x_2) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad f_1(x_n) = 0$

$f_2(x_1) = 0 \quad f_2(x_2) = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad f_2(x_n) = 0$

$f_n(x_1) = 0 \quad f_n(x_2) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad f_n(x_n) = 1$

1°) Montrer que si $(f_1 , \ldots , f_n)$ vérifient la propriété P_n, ils forment un système libre de E.

On appellera E_1 le sous-espace de E ayant pour base cet ensemble.

2°) Soit E_2 l'ensemble des fonctions de E s'annulant pour $x_1 , x_2 , \ldots, x_n$;

donc $g \in E_2 \iff g(x_1) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots g(x_n) = 0$

Montrer que E_2 est un sous-espace de E.

3°) Soient $(x_1 , \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$;

$(f_1 , \ldots , f_n)$ vérifiant $P_n(x_1 , \ldots , x_n)$;

E_1 le sous-espace engendré par $(f_1 , \ldots , f_n)$;

E_2 le sous-espace des fonctions s'annulant pour $x_1, \ldots , x_n$.

Montrer que E_1 et E_2 sont deux sous-espaces supplémentaires de E.

(Soit $h \in E$; on cherchera $f \in E_1$, $g \in E_2$ tels que $h = f + g$ et on remarquera d'abord que f est définie de façon unique par des conditions nécessaires.)

4°) Soit E' un sous-espace de E .

E" un vrai sous-espace de E' (c'est-à-dire $E" \neq E'$) .

Soit $(f_1 , f_2 , \ldots , f_n) \in E"^n$ et vérifiant la propriété $P_n(x_1, \ldots, x_n)$

Montrer qu'il existe une fonction $u \in E'$ et un réel x_{n+1} tels que

$u(x_1) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots u(x_n) = 0 \qquad u(x_{n+1}) = 1$

[on pourra remarquer qu'il existe dans E' une fonction φ telle que si

$\psi = \varphi - \lambda_1 f_1 \ldots\ldots - \lambda_n f_n$

on a $\psi \neq$ fonction zéro $\qquad \forall (\lambda_1 , \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$

et on utilisera cette fonction φ et une fonction ψ pour définir u]

5°) Montrer que si E_1 est un sous-espace de dimension n de E , il existe dans E_1 une base ayant la propriété P_n.

(on pourra éventuellement admettre le résultat précédent pour opérer par récurrence)

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail